7. CINEMATIQUE DU SOLIDE INDEFORMABLE

-Notion de torseur cinématique-

Elaboré par : Youssef RAHOU, janvier 2018

1. Introduction :

La cinématique consiste à la description du mouvement des systèmes matériels sans pour autant tenir en compte les causes qui y sont derrière.

Une fois que les grandeurs physiques permettant de quantifier la description cinématique du mouvement d'un solide (S) donné, ont été définies, et que les outils permettant de les évaluer ont été maitrisés, à travers principalement **la méthode de la dérivation directe**, L'objectif de ce présent chapitre est de **mettre en place un outil pratique permettant de décrire globalement la situation cinématique du tout point du solide (S)**, pour cela :

- En utilisant la méthode de la dérivation directe, ainsi que le caractère indéformable du solide (S), on mettra en place **la notion de champ des vecteurs vitesse, qui suppose un lien entre toutes les vitesses du solide (S).**
- La propriété précédente permet de décrire globalement la cinématique du solide (S), simplement à travers deux grandeurs : le vecteur rotation **et le vecteur vitesse d'un seul point du solide (S**), ainsi on introduira **la notion de torseur cinématique**.
- Le torseur cinématique a quelques propriétés intéressantes qu'on mettra en évidence, ainsi que quelques cas particuliers qu'on décrira.
- Enfin, la notion de champ des vecteurs est-elle extensible vers les vecteurs accélération ?

2. Champ des vecteurs vitesses du point d'un solide :

Le solide (S) considéré est **indéformable**, c'est-à-dire que pour deux points A et B de (S), la distance AB reste constante à tout moment, mais qu'en est-il pour des vitesses $\vec{V}(\mathbf{A/R})$ et $\vec{V}(\mathbf{B/R})$? Reprenons le cas du robot Ericc 3 dont le schéma cinématique simplifié est représenté ci-dessous :

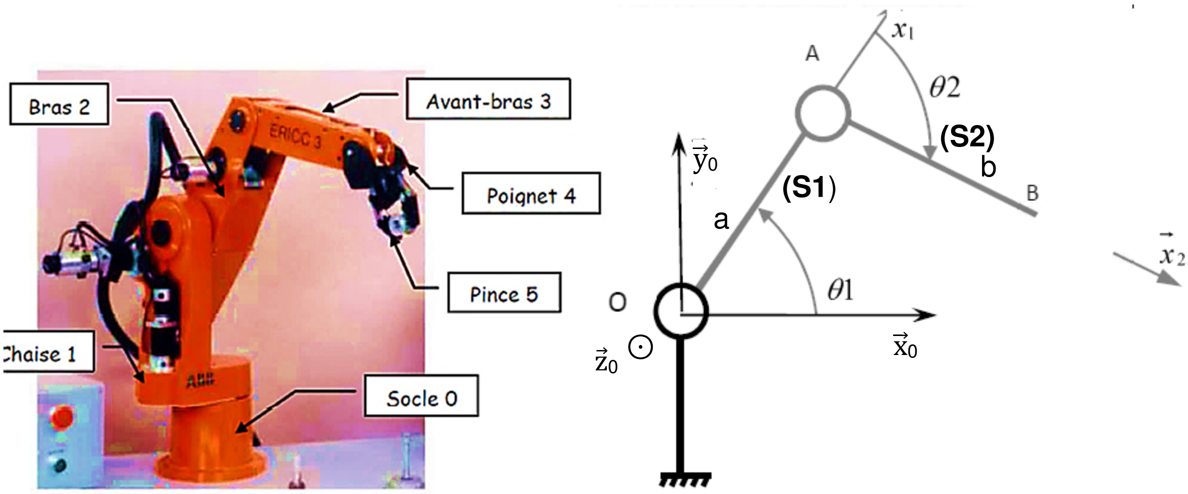


Figure.1. Robot Ericc 3, mécanisme réel et schéma cinématique simplifié

Calculons les vitesses des deux points A et B du solide (S2), on pose OA=a et AB=b :

On a:

$$\vec{V}(\mathbf{A/R})=\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OA}(\mathrm{t})\right]_{\mathbf{R}}=\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OA}(\mathrm{t})\right]_{\mathbf{R1}}+\vec{\Omega}(\mathrm{S1/R})\wedge\overrightarrow{\mathbf{OA}}=\dot{\theta}_1.\vec{z}_0\wedge \mathrm{a}.\vec{x}_1=\mathrm{a}.\dot{\theta}_1.\vec{y}_1.$$

De même :

$$\vec{V}(\mathbf{B/R})=\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OB}(\mathrm{t})\right]_{\mathbf{R}}=\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OA}(\mathrm{t})\right]_{\mathbf{R}}+\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AB}(\mathrm{t})\right]_{\mathbf{R}}=\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OA}(\mathrm{t})\right]_{\mathbf{R}}+\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AB}(\mathrm{t})\right]_{\mathbf{R2}}+\vec{\Omega}(\mathrm{S2/R})\wedge\overrightarrow{\mathbf{AB}}$$

Avec $\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OA}(\mathrm{t})\right]_{\mathbf{R}}=\vec{V}(\mathbf{A/R})$.

Le solide (S2) est indéformable, par conséquent le vecteur $\overrightarrow{AB}(\mathrm{t})$ reste constant dans la base du repère lié à (S2), c'est-à-dire **R2 :**

$$\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AB}(\mathrm{t})\right]_{\mathbf{R2}}=\vec{0}$$

Il vient :

$$\underline{\vec{V}(\mathbf{B/R})=\vec{V}(\mathbf{A/R})+\vec{\Omega}(\mathrm{S2/R})\wedge\overrightarrow{\mathbf{AB}}}=\mathrm{a}.\dot{\theta}_1.\vec{y}_1+(\dot{\theta}_2.\vec{z}_0+\dot{\theta}_1.\vec{z}_0)\wedge \mathrm{b}.\vec{x}_2=\mathrm{a}.\dot{\theta}_1.\vec{y}_1+\mathrm{b}.(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)\,\vec{y}_2.$$

Au bilan, de manière globale, pour deux points A et B quelconques liés à un solide (S), le vecteur vitesse $\vec{V}(\mathrm{B/R})$ se déduit du vecteur vitesse $\vec{V}(\mathrm{A/R})$ par la relation :

$$\vec{V}(\mathbf{B/R})=\vec{V}(\mathbf{A/R})+\vec{\Omega}(\mathbf{S/R})\wedge\overrightarrow{\mathbf{AB}}$$

Remarque :

- Pour évaluer la vitesse de n'importe quel point M du solide (S), il suffit donc de connaitre la vitesse **en un point** A, $\vec{V}(A/R)$ ainsi que le vecteur rotation $\vec{\Omega}(S/R)$, ce qui permet de caractériser cinématiquement le solide (S) par un outil mathématique, rassemblant $\vec{\Omega}(S/R)$, et la vitesse en un point du solide (S), $\vec{V}(A/R)$ par exemple. Cet outil s'appelle **torseur cinématique**.

3. Notion de torseur cinématique :

3.1. Torseur cinématique, l'identité cinématique d'un solide indéformable :

3.1.1. Définition :

On appelle **torseur cinématique** du solide (S) dans son mouvement par rapport au repère R, torseur :

$$\{\mathcal{V}\,(S/R)\} = {}_A\left\{\begin{matrix} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{V}(A \in S/R) \end{matrix}\right\}$$

Ce torseur représente **le champ des vecteurs vitesse de tous les points M du solide (S),** à travers la relation : $\vec{V}(M/R) = \vec{V}(A/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AM}$.

Remarque :

- Le vecteur vitesse rotation $\vec{\Omega}(S/R)$ s'appelle **résultante** du torseur cinématique {V(S/R)}.
- Le vecteur $\vec{V}(A \in S/R)$ s'appelle **moment** du torseur cinématique {V(S/R)}.
- La relation $\vec{V}(M/R) = \vec{V}(A/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AB}$, est **dite relation de changement de point du moment du torseur cinématique.**

3.1.2. Utilité de la propriété du champ des vecteurs vitesses :

A. Points appartenant réellement à (S) et points considérés appartenir à (S) :

Pour mettre en évidence l'utilité de la propriété caractérisant le champ de vecteurs vitesses, $\vec{V}(M/R) = \vec{V}(A/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AM}$, voyons les types de points qu'on peut rencontrer en mécanique. En effet, un point M lié au solide (S) présente **deux situations** :

- **M appartient naturellement ou réellement au solide (S) : M est lié à tout instant à (S), dans ce cas** $\vec{V}(M/R)$ se calcule par dérivation directe ou par la relation de changement de point du moment du torseur cinématique.

  Méthode.1 : $\vec{V}(M/R) = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OM}(t)\right]_R$.

  Méthode.2 : $\vec{V}(M/R) = \vec{V}(A/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AM}$.

- **M est considéré lié au solide (S), uniquement à l'instant t** (point de contact par exemple, voir application ci-dessous). Ceci est traduit par l'expression : $\vec{V}(M \in S/R)$, **dans ce cas la dérivation directe est impossible.** Seule méthode de calcul possible : $\vec{V}(M/R) = \vec{V}(A/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AM}$.

B. Application :

Soit R (O, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$) un repère lié au bâti (S0), deux roues de friction (S1) et (S2) sont en liaison pivot, respectivement, d'axes (O, $\vec{z}$) et (A, $\vec{z}$) par rapport à (S0). Le point A est sur l'axe (O, $\vec{y}$). Les deux roues de friction sont en contact au point I, et ont pour rayon, respectivement $\mathbf{r_1}$ et $\mathbf{r_2}$. Soit R1 (O, $\vec{x}_1$, $\vec{y}_1$, $\vec{z}$) un repère lié à la roue (S1),

On pose $\theta_1 = (\vec{x}, \vec{x}_1)$, $\vec{\Omega}(S1/R) = \omega_1.\vec{z}$ et $\vec{\Omega}(S2/R) = \omega_2.\vec{z}$. Soit un point P de la roue S1 tel que : $\overrightarrow{OP} = r_1.\vec{x}_1$.

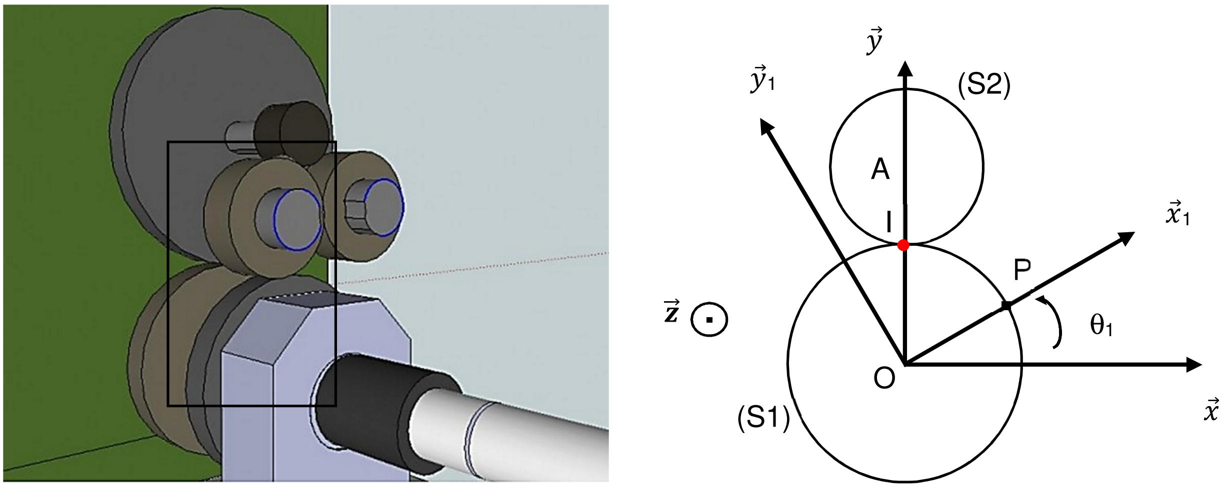


Figure.2. Roues de friction, modèle et schéma simplifié.

- Calculons la vitesse $\vec{V}(P/R)$,

P est un point physique de (S1), c'est-à-dire qu'il appartient naturellement au solide (S1), on peut donc évaluer cette vitesse par deux méthodes :

Dérivation directe :

$$\vec{V}(P/R) = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OP}(t)\right]_R = r_1.\left[\frac{d}{dt}\vec{x}1(t)\right]_R = r_1.(\left[\frac{d}{dt}\vec{x}1(t)\right]_{R1} + \vec{\Omega}(S1/R) \wedge \vec{x}_1) = r_1.\omega_1.\vec{z} \wedge \vec{x}_1 = \mathbf{r_1.\omega_1.\vec{y}_1}$$

Relation de changement de point du moment du torseur cinématique :

$$\vec{V}(P/R) = \vec{V}(0/R) + \vec{\Omega}(S1/R) \wedge \overrightarrow{OP} = \omega_1.\vec{z} \wedge r_1.\vec{x}_1 = \mathbf{r_1.\omega_1.\vec{y}_1}$$

- Calculons le vecteur vitesse $\vec{V}(I \in S1/R)$, le point I est considéré lié à (S1) à l'instant t :

Une seule méthode possible, qui est la relation de changement de point du moment :

$$\vec{V}(I \in S1/R) = \vec{V}(0/R) + \vec{\Omega}(S1/R) \wedge \overrightarrow{OI} = \omega_1.\vec{z} \wedge r_1.\vec{y} = -\,\mathbf{r_1.\omega_1.\vec{x}}$$

- Calculons le vecteur vitesse $\vec{V}(\mathrm{I} \in \mathrm{S2/R})$, le point I est considéré lié à (S2) à l'instant t :

De même, seule la relation de changement de point du moment s'applique :

$\vec{V}(\mathrm{I} \in \mathrm{S2/R}) = \vec{V}(\mathrm{A/R}) + \vec{\Omega}(\mathrm{S2/R}) \wedge \overrightarrow{\mathrm{AI}} = \omega_2.\vec{z} \wedge -r_2.\vec{y} = \mathbf{r_2.\omega_2.\vec{x}}$

Remarque :

- La méthode de la dérivation directe pour calculer $\vec{V}(\mathrm{I} \in \mathrm{S1/R})$ donne :

$\vec{V}(\mathrm{I} \in \mathrm{S1/R}) = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{\mathrm{OI}}(t)\right]_R = r_1.\left[\frac{d}{dt}\vec{y}(t)\right]_R = \vec{\mathbf{0}}$, **par conséquent cette méthode est à ne pas utiliser lorsque le point n'appartient pas naturellement au solide.**

- Au niveau d'un point de contact I entre deux solides (S1) et (S2), on distingue trois ''points'' différents :

1. Un point I lié au solide (S1).
2. Un point I lié au solide (S2).
3. Le point de contact I, qui par définition représente le contact et n'appartient ni à (S1) ni à (S2).

3.2. Les propriétés classiques d'un torseur ''cinématique'' :

3.2.1. Equiprojectivité du champ des vecteurs vitesse :

Reprenons la relation de changement de point du moment du torseur cinématique :

$$\vec{\boldsymbol{V}}(\mathbf{B/R}) = \vec{\boldsymbol{V}}(\mathbf{A/R}) + \vec{\boldsymbol{\Omega}}(\mathbf{S/R}) \wedge \overrightarrow{\mathbf{AB}}$$

On remarque que :

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}}.\vec{\boldsymbol{V}}(\mathbf{B/R}) = \overrightarrow{\mathbf{AB}}.\vec{\boldsymbol{V}}(\mathbf{A/R}) + \overrightarrow{\mathbf{AB}}.[\vec{\boldsymbol{\Omega}}(\mathbf{S/R}) \wedge \overrightarrow{\mathbf{AB}}]$$

Or, $\vec{\Omega}(\mathrm{S/R}) \wedge \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est, par définition, perpendiculaire à $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, d'où: $\overrightarrow{\mathbf{AB}}.[\vec{\boldsymbol{\Omega}}(\mathbf{S/R}) \wedge \overrightarrow{\mathbf{AB}}] = \vec{\mathbf{0}}$.

Il en résulte que **le champ des moments (vecteurs vitesse) du torseur cinématique est équiprojectif**, c'est-à-dire, pour tous points A et B du solide indéformable (S) :

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}}.\vec{\boldsymbol{V}}(\mathbf{B/R}) = \overrightarrow{\mathbf{AB}}.\vec{\boldsymbol{V}}(\mathbf{A/R})$$

3.2.2. L'axe central :

A. Définition :

L'axe central du torseur cinématique est l'ensemble des points M dont la vitesse $\vec{\mathbf{V}}(\mathbf{M/R})$ est colinéaire au vecteur rotation $\vec{\boldsymbol{\Omega}}(\mathbf{S/R})$. Il s'agit d'une droite Δ_0 dirigée par $\vec{\Omega}(\mathrm{S/R})$ et variable en fonction du temps.
L'axe central Δ_0**(t)** est appelé **axe instantané de rotation et de glissement** dans le mouvement de (S) par rapport à R.

Remarque :

- Pour un mouvement de rotation, l'axe central est l'axe de rotation.
- L'axe central n'existe que si le vecteur rotation $\vec{\Omega}(S/R)$ est non nul, dans le cas d'une translation <u>il n'est pas défini.</u>

B. *Détermination de l'axe central :*

Connaissant le torseur cinématique du solide (S) en un point A :

$$\{\mathcal{V}\,(S/R)\} = \underset{A}{\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{V}(A \in S/R) \end{Bmatrix}}$$

L'axe central est colinéaire à $\vec{\Omega}(S/R)$ **et passe par un point H_A, qui est la perpendiculaire abaissée de A sur l'axe central recherché** Δ_0 tel que :

$$\overrightarrow{AH_A} = \frac{\vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{V}(A \in S/R)}{\vec{\Omega}(S/R)^2}$$

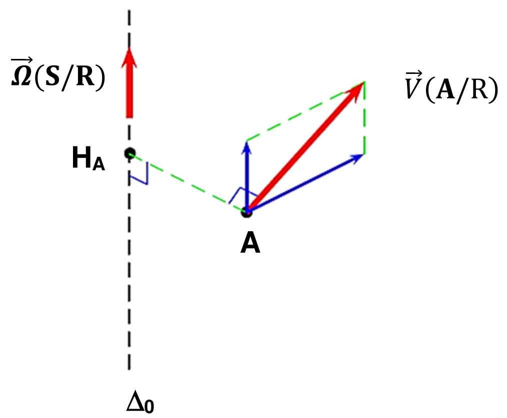


Figure.3. Schématisation de la position de l'axe central.

3.2.3. **Le moment central :**

On appelle moment central le moment, et donc la vitesse $\vec{V}(M/R)$ **des points M qui forment l'axe central, le moment central est :**

- colinéaire à $\vec{\Omega}(S/R)$.
- le même pour tous les points M de l'axe central.

3.3. Torseurs typiques : torseur couple et torseur à résultante :

3.3.1. **Le torseur couple :**

A. Définition :

On dit que le torseur cinématique du mouvement du solide (S) par rapport au repère R est **un couple,** si **:**

$$\{\mathcal{V}\,(S/R)\} = {}_{A}\left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ \vec{V}(A/R) \end{matrix} \right\}$$

$\vec{V}(A/R)$ est supposé non nul.

Remarque :

- La propriété du champ des vecteurs vitesse permet de montrer, que pout tout point M du solide (S), $\vec{V}(M/R) = \vec{V}(A/R)$.
- A l'instant t, tous les points du solide (S) ont la même vitesse (**donc même trajectoire**), on dit que **(S) est en mouvement de translation**.

B. La translation rectiligne :

Le mouvement du solide (S) par rapport au repère R est **un mouvement de translation rectiligne,** si :

- Tous les points du solide (S) ont la même vitesse, donc même trajectoire.
- Cette trajectoire est un **segment de droite.**

Figure.4. Mouvement de translation rectiligne, télécabine.

C. La translation circulaire :

Le mouvement du solide (S) par rapport au repère R est **un mouvement de translation circulaire,** si :

- Tous les points du solide (S) ont la même vitesse, donc même trajectoire.
- Cette trajectoire est un **arc de cercle.**

Figure.4. Mouvement de translation circulaire, cabines d'une grande roue (manège).

3.3.2. **Le torseur à résultante :**

A. Définition :

On dit que le torseur cinématique du mouvement du solide (S) par rapport au repère R est **un torseur à résultante**, si il existe un point A tel que **:**

$$\{\mathcal{V}\,(S/R)\} = {}_{A}\left\{\begin{matrix}\vec{\Omega}(S/R)\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}$$

$\vec{\Omega}(S/R)$ est supposé non nul.

Remarque :

- Le point A est un point de l'axe central Δ du torseur $\{\mathcal{V}$ (S/R)}, puisque $\vec{\mathbf{V}}(\mathbf{A/R}) = \vec{\mathbf{0}} \,/\!/\, \vec{\mathbf{\Omega}}(\mathbf{S/R})$.
- Pour tout point M de l'axe central Δ, $\vec{\mathbf{V}}(\mathbf{M/R}) = \vec{\mathbf{0}}$,
  en effet : $\vec{\mathbf{V}}(\mathbf{M/R}) = \vec{\mathbf{V}}(\mathbf{A/R}) + \vec{\mathbf{\Omega}}(\mathbf{S/R}) \wedge \overrightarrow{\mathbf{AM}} = \vec{\mathbf{\Omega}}(\mathbf{S/R}) \wedge \overrightarrow{\mathbf{AM}} = \vec{\mathbf{0}}$, car A,M $\in \Delta \,/\!/\, \vec{\mathbf{\Omega}}(\mathbf{S/R})$.
- **A l'instant t**, le mouvement de (S) par rapport R est un mouvement de rotation autour de Δ(t).
- Lorsque (S) à une liaison pivot d'axe (o,$\vec{\mathbf{z}}$) par rapport à un bâti (S0), tous les points de l'axe (o,$\vec{\mathbf{z}}$) ont une vitesse nulle par rapport au bâti (S0), **à tout instant**, par conséquent le torseur $\{\mathcal{V}$ (S/R)} est un torseur à résultante, et l'axe central est l'axe de rotation (o,$\vec{\mathbf{z}}$).

4. Torseurs cinématiques des liaisons classiques

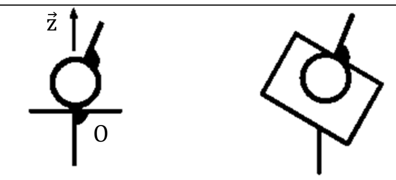
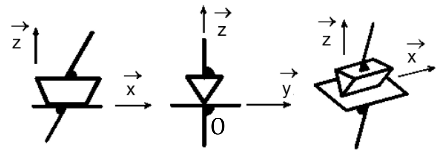
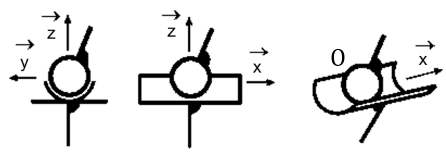
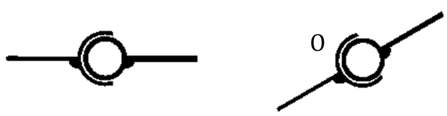
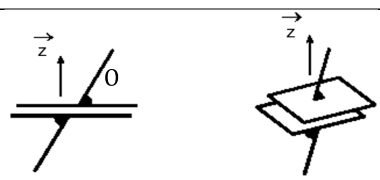
A chaque liaison classique déjà étudiée, représentant le mouvement d'un solide (S2) par rapport à un solide (S1), on peut associer un torseur cinématique **$\{\mathcal{V}$ (S2/S1)$\}$ =** $_{\mathbf{O}}\left\{\begin{matrix} \vec{\boldsymbol{\Omega}}(\mathbf{S2/S1}) \\ \vec{\boldsymbol{V}}(\mathbf{O} \in \mathbf{S2/S1}) \end{matrix}\right\}$, avec O l'origine du repère local associé $\mathbf{R}(0,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ (voir chapitre 1). Les mouvements élémentaires possibles sont au maximum trois translations élémentaires Tx, Ty et Tz, et trois rotations élémentaires Rx, Ry et Rz.

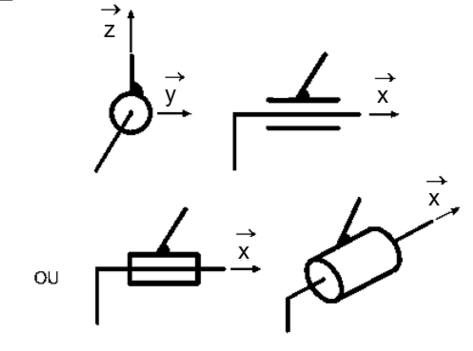
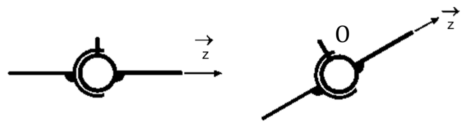
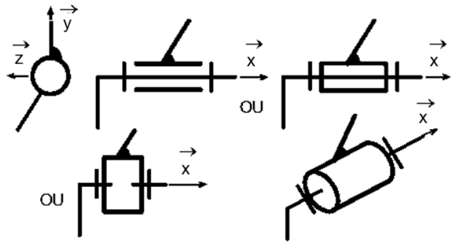
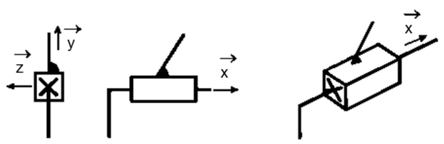
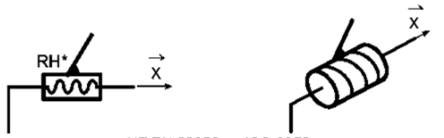
Par conséquent, dans $\mathbf{R}(0,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$:

- $\vec{\boldsymbol{\Omega}}(\mathbf{S2/S1})$ peut s'écrire : $\vec{\Omega}(S2/S1) = \Omega_x.\vec{x} + \Omega_y.\vec{y} + \Omega_z.\vec{z}._{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
- $\vec{\boldsymbol{V}}(\mathbf{O} \in \mathbf{S2/S1})$ peut s'écrire : $\vec{\boldsymbol{V}}(\mathbf{O} \in \mathbf{S2/S1}) = \boldsymbol{V_x}.\vec{\mathbf{x}} + \boldsymbol{V_y}.\vec{\mathbf{y}} + \boldsymbol{V_z}.\vec{\mathbf{z}}.$

- Pour faire apparaitre toutes ces composantes sur le torseur cinématique associé à chaque liaison, on adopte la notation suivante :

$$\{\mathcal{V}\ (\mathrm{S2/S1})\} = {}_{\mathbf{O}}\begin{Bmatrix} \Omega x & Vx \\ \Omega y & Vy \\ \Omega z & Vz \end{Bmatrix}$$

Designation de la liaison	Schématisations plane et spatiale	Torseur cinématique $\{\mathcal{V}$ (S2/S1)$\}$	Ensemble des points où $\{\mathcal{V}$ (S2/S1)$\}$ conserve sa forme
Liaison ponctuelle de normale (o, $\vec{z}$)		${}_{O}\begin{Bmatrix} \Omega x & Vx \\ \Omega y & Vy \\ \Omega z & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	En tout point de (o, $\vec{z}$)
Liaison linéaire rectiligne d'axe (o, $\vec{x}$) et de normale (o, $\vec{z}$)		${}_{O}\begin{Bmatrix} \Omega x & Vx \\ 0 & Vy \\ \Omega z & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	En tout point du plan (o, $\vec{x}$, $\vec{z}$)
Liaison linéaire annulaire d'axe (O,$\vec{x}$)		${}_{O}\begin{Bmatrix} \Omega x & Vx \\ \Omega y & 0 \\ \Omega z & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	Au point O
Liaison rotule de centre 0		${}_{O}\begin{Bmatrix} \Omega x & 0 \\ \Omega y & 0 \\ \Omega z & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	Au point O
Liaison appui plan de normale (O,$\vec{z}$)		${}_{O}\begin{Bmatrix} 0 & Vx \\ 0 & Vy \\ \Omega z & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	En tout point

liaison pivot glissant d’axe (O,$\vec{x}$)		$\begin{Bmatrix}\Omega x & Vx\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_{O(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	En tout point de l’axe (o, $\vec{x}$)
liaison sphérique à doigt d’axes (O,$\vec{x}$) et (O,$\vec{y}$)		$\begin{Bmatrix}\Omega x & 0\\ \Omega y & 0\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_{O(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	Au point O
liaison pivot d’axe (O,$\vec{x}$)		$\begin{Bmatrix}\Omega x & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_{O(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	En tout point de l’axe (o, $\vec{x}$)
liaison glissière d’axe (O,$\vec{x}$)		$\begin{Bmatrix}0 & Vx\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_{O(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	En tout point
liaison hélicoïdale d’axe (O,$\vec{x}$)	 NF EN 23952 ou ISO 3952 * RH ou sans indication : hélice à droite. LH : hélice à gauche	$\begin{Bmatrix}\Omega x & Vx\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_{O(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ Vx=pas. Ωx	En tout point de l’axe (o, $\vec{x}$)
liaison encastrement		$\begin{Bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_{O(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	En tout point

Remarque :

- La colonne tout à droite donne l’ensemble des points où le torseur cinématique associé à la liaison conserve **sa forme, c’est-à-dire là où les composantes nulles du torseur restent nulles**, par exemple, pour une liaison pivot glissant, **en un point O’** de l’axe (o, $\vec{x}$), le torseur cinématique s’écrira :

$$\{\mathcal{V}\,(S2/S1)\} = \begin{Bmatrix}\Omega x & Vx'\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_{O'(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

5. Champ des vecteurs accélération des points d'un solide :

A priori, la propriété du champ des vecteurs vitesse s'écrit, pour deux points quelconques A et B du solide (S) :

$$\vec{V}(B/R) = \vec{V}(A/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AB}$$

Pour établir une relation entre les vecteurs accélération $\vec{\Gamma}(B/R)$ et $\vec{\Gamma}(A/R)$, dérivons membre à membre l'expression précédente :

- $\left[\frac{d}{dt}\vec{V}(B/R)\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\vec{V}(A/R)\right]_R + \left[\frac{d}{dt}(\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AB})\right]$

Avec : $\vec{\Gamma}(B/R) = \left[\frac{d}{dt}\vec{V}(B/R)\right]_R$, $\vec{\Gamma}(A/R) = \left[\frac{d}{dt}\vec{V}(A/R)\right]_R$

et $\left[\frac{d}{dt}(\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AB})\right]_R = \left[\frac{d}{dt}(\vec{\Omega}(S/R)\right]_R \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AB}(S/R)\right]_R$

Or, $\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AB}(S/R)\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AB}(S/R)\right]_{Rs} + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AB}$, puisque $\overrightarrow{AB}$ est constant dans Rs, repère lié au solide (S).

Il vient que la relation entre les vecteurs accélération de deux points A et B du solide (S) est :

$$\vec{\Gamma}(B/R) = \vec{\Gamma}(A/R) + \left[\frac{d}{dt}(\vec{\Omega}(S/R)\right]_R \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\Omega}(S/R) \wedge [\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AB}].$$

Remarque :

- Pour des points A et B n'appartenant pas réellement au solide (S), cette relation s'écrit :

$$\vec{\Gamma}(B \in S/R) = \vec{\Gamma}(A \in S/R) + \left[\frac{d}{dt}(\vec{\Omega}(S/R)\right]_R \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\Omega}(S/R) \wedge [\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AB}]$$